



Optimization of Urban Metro Scheduling for Reducing Travel Time and Enhancing Transportation System Efficiency

Mohammad Mahdi Mobaraki¹ | Ali Roghani Araghi^{2*} | Younes Noorollahi³

1. M.Sc. Student, School of Energy Engineering and Sustainable Resources, College of Interdisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran . Email: m.mahdimobaraki@ut.ac.ir
2. Corresponding Author, Assistant Professor, School of Energy Engineering and Sustainable Resources, College of Interdisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran. Email: ali.roghani@ut.ac.ir
3. Professor, School of Energy Engineering and Sustainable Resources, College of Interdisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran. Email: noorollahi@ut.ac.ir

ARTICLE INFO

Article type:
Research Paper

Article History:
Received 15 December 2024
Revised 14 January 2025
Accepted 13 February 2025
Published Online 04 April 2025

Keywords:
Optimization,
Waiting Time,
Travel Time,
Metro,
Grey Wolf Algorithm.

ABSTRACT

In this study, the Grey Wolf Optimizer (GWO) algorithm is effectively employed to optimally schedule an urban metro system. The primary objective of this research is to significantly minimize the total passenger travel time, including waiting time at stations and in-train travel time. The proposed model considers parameters such as passenger arrival rates, stop durations, and the optimization variable h to simultaneously optimize departure and stop times. The implementation results on real-world data indicate that the cost function is significantly reduced from 23,500.75 seconds to 16,939.12 seconds using this approach. Additionally, the reduction in waiting time at high-traffic stations leads to a substantial improvement in system efficiency and passenger satisfaction. This innovative approach can pave the way for developing intelligent solutions in public transportation systems, reducing operational costs, and enhancing metro system performance. The results obtained open new avenues for future research aimed at further improving metro scheduling and management.

Cite this article: Mobaraki, M. M.; Roghani Araghi, A. & Noorollahi, Y. (2025). Optimization of Urban Metro Scheduling for Reducing Travel Time and Enhancing Transportation System Efficiency. *Urban Development Policy Making*, 2 (1), 17-30. DOI: <http://doi.org/10.22034/judpm.2025.504991.1008>



© Mohammad Mahdi Mobaraki, Ali Roghani Araghi, Younes Noorollahi
DOI: <http://doi.org/10.22034/judpm.2025.504991.1008>

Introduction

Metro scheduling represents a critical and complex aspect of public transportation planning. Traditionally, the process is divided into several components—network design, line planning, timetable creation, vehicle assignment, and staff scheduling—with most efforts focusing on the operator's perspective. Such an emphasis may neglect the overall passenger journey, which includes both waiting at stations and riding the train. The current paper proposes a novel, passenger-centered approach to metro scheduling intending to minimize total travel time by addressing both waiting times at stations and in-train travel durations. Metro timetables may be periodic, offering ease of memorization, or non-periodic, which can better accommodate variable demand. Although numerous models have been developed to tackle scheduling challenges, few directly target the reduction of overall travel time under dynamic conditions. To bridge this gap, the Grey Wolf Optimizer (GWO) algorithm is utilized. By incorporating realistic factors such as passenger arrival rates and station dwell

times, the proposed timetable is designed to better meet the needs of urban commuters. Simulation studies based on actual metro data reveal that this approach produces a balanced schedule that significantly reduces overall travel time, thereby paving the way for more efficient and user-friendly public transportation systems.

Methodology

In the proposed model, using recursive functions such as R, theta, and Q, and considering the passenger entry rate and parameters related to the stations, waiting and travel times are accurately calculated. Then, the GWO algorithm with a population of 50 wolves and over 5 iterations were executed.

Results

The best optimal value found for the variable h was 0.580231, which led to the minimization of the cost function to a value of 16939.12. The optimization results show that waiting and travel times in different metro stations are adjusted differently and in proportion to the conditions of each station. For example, station 1 has a waiting time of 18.18 seconds and a travel time of 4320 seconds, and other stations also provide different patterns of these two indicators.

Conclusion

This achievement can pave the way for improving the performance of public transportation systems, increasing passenger satisfaction, and reducing operating costs. In addition, the use of real data and the development of multivariate models in future studies can increase the accuracy and efficiency of this optimization model. In summary, this research shows that the use of intelligent algorithms such as GWO is a new approach to improving the scheduling and management of metro systems and can be a guide for future research and development in the field of public transportation.



بهینه‌سازی زمان بندی سیستم متروی شهری برای کاهش زمان سفر و ارتقای کارایی سامانه حمل و نقل

محمد مهدی مبارکی^۱ | علی روغنی عراقی^{۲*} | یونس نوراللهی^۳

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی سیستم‌های انرژی، دانشکده مهندسی انرژی و منابع پایدار، دانشکده‌های میان‌رشته‌ای، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: m.mahdimobaraki@ut.ac.ir
۲. نویسنده مسئول، استادیار گروه مهندسی سیستم‌های انرژی پایدار، دانشکده مهندسی انرژی و منابع پایدار، دانشکده‌های میان‌رشته‌ای، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: ali.roghani@ut.ac.ir
۳. استاد گروه مهندسی سیستم‌های انرژی پایدار، دانشکده مهندسی انرژی و منابع پایدار، دانشکده‌های میان‌رشته‌ای، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: noorollahi@ut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

در این پژوهش، از الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری (GWO) برای تنظیم بهینه جدول زمانی سیستم متروی شهری استفاده شده است. هدف اصلی این مطالعه، به حداقل رساندن زمان کلی سفر مسافران شامل زمان انتظار در ایستگاه‌ها و زمان سواری در قطارها است. در مدل پیشنهادی، پارامترهایی نظیر نرخ ورود مسافران، زمان‌های توقف و متغیر بهینه‌سازی h مد نظر قرار گرفته‌اند تا زمان‌های حرکت و توقف به صورت هم‌زمان بهینه شوند. نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم روی داده‌های واقعی نشان می‌دهد با استفاده از این روش، تابع هدف به طور قابل توجهی کاهش یافته و مقدار آن از $23500/75$ ثانیه به $16939/12$ ثانیه رسیده است. همچنین، کاهش زمان انتظار در ایستگاه‌های پرتردد به بهبود قابل توجه کارایی سیستم و افزایش رضایت مسافران منجر شده است. این رویکرد نوین می‌تواند زمینه‌ساز توسعه راهکارهای هوشمند در سامانه‌های حمل و نقل عمومی، کاهش هزینه‌های عملیاتی و ارتقای عملکرد سیستم مترو شود. نتایج به دست آمده، افق‌های جدیدی را برای تحقیقات آتی در جهت بهبود بیشتر زمان بندی و مدیریت سامانه‌های مترو فراهم می‌آورد

نوع مقاله:

پژوهشی

تاریخ‌های مقاله:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۲۵

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۰/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۲۵

تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۱/۱۵

کلیدواژه:

بهینه‌سازی،

زمان انتظار،

زمان سفر،

مترو،

الگوریتم گرگ خاکستری.

استناد: مبارکی، محمد مهدی؛ روغنی عراقی، علی و نوراللهی، یونس (۱۴۰۴). بهینه‌سازی زمان بندی سیستم متروی شهری برای کاهش زمان سفر و ارتقای کارایی سامانه حمل و نقل. *سیاستگذاری پیشرفت شهری*، ۲ (۱) ۳۰-۱۷.

DOI: <http://doi.org/10.22034/judpm.2025.504991.1008>



۱. مقدمه

برنامه‌ریزی سیستم متروی شهری یکی از جنبه‌های فرعی برنامه‌ریزی سیستم حمل‌ونقل عمومی پیچیده است و معمولاً به چندین مرحله از جمله طراحی شبکه، طراحی خط، جدول زمانی، وسایل حمل‌ونقل و کارمندان تجزیه می‌شود [1]. این مشکلات به طور سنتی از دیدگاه اپراتور بهینه شده‌اند. این مقاله رویکردی را ارائه می‌کند که محدودیت‌های اپراتور را در نظر می‌گیرد و کل زمان سفر مسافران را به حداقل می‌رساند، که به عنوان مجموع میانگین زمان انتظار مسافر در ایستگاه‌ها و میانگین زمان سواری در قطار اندازه‌گیری می‌شود. هدف این مطالعه، حل مشکل جدول زمانی متروی تک‌خط شهری است که شامل تعیین زمان حرکت در هر ایستگاه می‌شود. علاوه بر این، سرعت بهینه بین هر بخش از هر سرویس قطار و از هر ایستگاه در امتداد یک متروی تک‌خط شهری در یک افق برنامه‌ریزی، که توسط تقاضای مبدأ - مقصد مسافری پویا تعیین می‌شود، نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. مسئله جدول زمانی متروی شهری را می‌توان به دو صورت تقسیم کرد: جدول زمانی دوره‌ای و غیر ادواری [2]. یک مدل ریاضی برای مسئله زمان‌بندی دوره‌ای پیشنهاد کرد که گسترش پدیده‌های دوره‌ای زمان‌بندی معمولی را با محدودیت‌های تقدم در نظر گرفت. مزیت جدول‌های زمانی دوره‌ای این است که مسافران به راحتی می‌توانند آن‌ها را به خاطر بسپارند و بتوانند با شبکه‌های ریلی در مقیاس بزرگ مقابله کنند [3]. جایگزینی که شامل ایجاد یک جدول زمانی غیر دوره‌ای است، زمانی مناسب است که نتوان تقاضا را طی زمان ثابت فرض کرد. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی اعداد صحیح مختلفی برای مسئله جدول زمانی غیر تناوبی پیشنهاد شده است. کُری نوعی مدل و همچنین الگوریتم‌ها و استراتژی‌هایی برای اعزام قطارها با سرعت‌ها و الگوهای توقف متفاوت برای یک خط ریلی دومسیره که به قطارها در یک جهت اختصاص داده شده است، ارائه کرد. آن‌ها بیشتر آن را به شبکه‌های ریلی عمومی و پیچیده، با انتخاب خطوط و سکوها ایستگاه، گسترش دادند [4]. کاپرارا و همکاران مدلی را به منظور تعیین جدول زمانی دوره‌ای برای مجموعه‌ای از قطارها پیشنهاد کردند که قادر به نقض ظرفیت‌های مسیر نیست و برخی محدودیت‌های عملیاتی را برطرف می‌کند. آن‌ها نوعی مدل مبتنی بر نظریه گراف را برای مدل‌سازی مسئله با استفاده از یک گراف چندگانه جهت‌داده شده پیشنهاد کردند که در آن گره‌ها با خروج/رسیدن به ایستگاه‌های خاص و لحظه‌های زمانی داده‌شده مطابقت دارند [5]. اودهاوزدن^۱ و فان‌استین‌وگن^۲ با در نظر گرفتن زمان انتظار و تأخیرها با بهبود خدمات مسافری در بخش کوچکی از شبکه راه آهن بلژیک سروکار داشتند. آن‌ها یک مدل دوفازی ایجاد کردند. اول، زمان‌های بافر ایده‌آل بر اساس توزیع تأخیر قطارهای ورودی و وزن زمان‌های مختلف انتظار برای محافظت از اتصالات زمانی که قطار ورودی دیر است، محاسبه می‌شود. و دوم، برنامه‌ریزی خطی استاندارد برای ایجاد یک جدول زمانی بهبودیافته با اتصالات برنامه‌ریزی‌شده و زمان‌های بافر ایده‌آل در صورت امکان استفاده می‌شود [6]. توت^۳ و کاکیان^۴ مطالعات موجود را بررسی کردند که عمدتاً با مشکل جدول زمانی قطار در نسخه‌های اسمی و قوی آن سروکار داشتند، که محدودیت‌های ظرفیت مسیر را برآورده می‌کرد. هدف از پژوهش آن‌ها، بهینه‌سازی یک تابع هدف با معانی مختلف بود که با درخواست‌های شرکت راه آهن مطابقت داشت. اکثر مقالات یادشده یک تابع هدف مربوط به اپراتور خدمات را بهینه کردند. از دیدگاه اپراتور زیرساخت، یک هدف مشترک به حداقل رساندن انحراف از یک برنامه جدول زمانی پیشنهادی توسط اپراتور است که اغلب در موارد دوره‌ای استفاده می‌شود. از دیدگاه کاربران، هدف به حداقل رساندن زمان انتظار تحت تقاضای مسافر پویا در نظر گرفته شده است [7]. با این حال، این مشارکت‌ها به صراحت کل زمان سفر تحت تقاضای مسافر پویا در نظر گرفته نشده است. مشارکت‌های زیر بر ساختار پویای رفتار تقاضا متمرکز شده است [8]. هنزلر^۵ روش‌های محاسبه ماتریس‌های OD پویا برای ایستگاه‌های قطار را بررسی کرد. یانو و نیومن نوعی الگوریتم برنامه‌نویسی پویا برای جدول زمانی قطارهای مورد استفاده به منظور حمل کانتینرهایی که به صورت پویا به مبدأ می‌رسند پیشنهاد کردند [9]. کوردونه^۶ و ردائلی^۷ تأثیر متقابل بین کیفیت جدول زمانی و مقدار تقاضای

1. Oudheusden
 2. Vansteenwegen
 3. Toth
 4. Cacchiani
 5. Hänseler
 6. Cordone
 7. Redaelli

حمل‌ونقل که توسط راه آهن جذب می‌شود را در نظر گرفتند. آن‌ها یک مدل غیرخطی عدد صحیح مختلط با آرامش پیوسته غیر محدب پیشنهاد کردند [۱۰]. نیو^۱ و ژو^۲ بر بهینه‌سازی جدول زمانی قطارهای مسافری در یک راهروی ریلی شهری به‌شدت شلوغ تحت یک سناریوی تقاضای پویا تمرکز کردند. محققان یادشده به رفتار سیستم در شرایط تراکم زمانی که تقاضا از ظرفیت فراتر رفت علاقه‌مند بودند [۱۱]. با توجه به مطالب یادشده و محدودیت‌های موجود در مدل‌های پیشین، ضرورت بررسی و بهبود زمان‌بندی مترو با در نظر گرفتن کل زمان سفر مسافران، به‌ویژه در شرایط تقاضای پویا، بیش از پیش احساس می‌شود. در این مطالعه، با تکیه بر رویکردهای نوین و استفاده از الگوریتم‌های هوشمند بهینه‌سازی همچون الگوریتم گرگ خاکستری، سعی بر آن شده است تا یک مدل جامع و چندوجهی ارائه شود که نه تنها زمان انتظار در ایستگاه‌ها، بلکه زمان سواری در قطارها را به طور هم‌زمان بهینه کند. هدف اصلی این پژوهش، ارائه راهکاری کارآمد برای کاهش زمان کلی سفر و بهبود عملکرد سیستم حمل‌ونقل عمومی از منظر مسافران است. به این ترتیب، در بخش‌های بعدی مقاله به تشریح روش‌شناسی، نتایج حاصل از بهینه‌سازی و تحلیل دقیق عملکرد مدل پیشنهادی پرداخته خواهد شد.

۲. روش‌شناسی

با توجه به ویژگی‌های عملیات واقعی سیستم‌های مترو، مدل را بر اساس مفروضات زیر فرموله می‌کنیم:

i. جدول زمانی مترو چرخه‌ای است. سفرهای قطار در چرخه‌های مختلف با زمان اقامت یکسان در ایستگاه‌ها و استراتژی رانندگی در بخش‌ها توزیع می‌شود. قطارهای مختلف با یک مسیر ثابت به دنبال یکدیگر می‌آیند.

ii. در ساعت‌های اوج بار، نرخ ورود مسافران به هر ایستگاه ثابت در نظر گرفته می‌شود، اما مقادیر هر ایستگاه متفاوت است.

زمان مسافر: برای توصیف کامل تر تأثیر جدول زمانی بر تقاضای مسافر، این مطالعه از زمان مسافر برای انعکاس رضایت مسافر استفاده می‌کند که شامل زمان انتظار مسافر و زمان سفر مسافر است. در یک بازه زمانی مشخص، ورود مسافران به مترو پویا و تصادفی است، اما تعداد مسافران ورودی به طور کلی در ساعت‌های اوج مصرف ثابت نگه داشته می‌شود. از زمانی که قطار i به ایستگاه n می‌رسد تا زمانی که قطار $i + 1$ به ایستگاه n می‌رسد. هنگامی که اولین قطار به ایستگاه می‌رسد، تعداد مسافران منتظر در ایستگاه را می‌توان به عنوان تعداد مسافرانی که در یک دوره زمانی به ایستگاه می‌رسند، تقریب زد به عنوان مثال $= Q_n \tau_n H$. وقتی قطار i به ایستگاه n می‌رسد، تعداد مسافران منتظر در ایستگاه است:

$$Q_n^i = \tau_n h - x_n + Q_n^{i-1} + \tau_n x_n - \theta_n^i - 1 \quad (1)$$

با توجه به ظرفیت قطار، وقتی قطار i به ایستگاه شماره n می‌رسد روابط ۲ و ۳:

$$\theta_n^i = \min \{ Q_n^i + \tau_n x_n, C - R_n^i + \phi_n^i \} \quad (2)$$

$$R_n^i = \sum_j^{n-1} (\theta_j^i - \phi_j^i) \quad (3)$$

کل زمان انتظار مسافر از قطار i تا قطار است $i + 1$ به ایستگاه n می‌رسد (رابطه ۴):

$$w_n^i(h, x_n) = Q_n^i h + \frac{\tau_n h^2}{2} + \theta_n^i \frac{x_n}{2} - \theta_n^i p_n \frac{x_n}{2} - \theta_n^i h \quad (4)$$

بر اساس توضیحات بالا در مورد زمان انتظار مسافر، زمان سفر مسافر در ساعت‌های اوج مصرف (یعنی از زمانی که قطار i به ایستگاه n می‌رسد تا زمانی که قطار i به ایستگاه $n + 1$ می‌رسد) کل زمان سفر مسافر قطار i در بخش $(n + 1, n)$ به شکل رابطه ۵ است:

$$T_n^i = (2R_n^i - \phi_n^i) p_n \frac{x_n}{2} + \tau_n R_{n+1}^i + \frac{(R_n^i - \phi_n^i + R_{n+1}^i)(x_n - p_n x_n)}{2} \quad (5)$$

بر اساس محاسبات زمان انتظار مسافر و زمان سفر مسافر، کل زمان مسافر است (رابطه ۶):

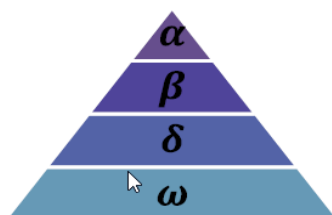
$$PT(h, x) = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N-1} w_n^i + T_n^i \quad (۶)$$

۳. الگوریتم گرگ خاکستری

گرگ خاکستری (*Canis lupus*) از خانواده Canidae است. گرگ‌های خاکستری به عنوان شکارچیان رأس در نظر گرفته می‌شوند؛ به این معنا که در بالای زنجیره غذایی قرار دارند. گرگ‌های خاکستری بیشتر ترجیح می‌دهند در یک گله زندگی کنند. اندازه گروه به طور متوسط ۵ تا ۱۲ است. جالب توجه این است که آن‌ها یک سلسله‌مراتب غالب اجتماعی بسیار دقیق دارند، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است. رهبران یک مرد و یک زن هستند که آلفا نامیده می‌شوند. آلفا بیشتر مسئول تصمیم‌گیری در مورد شکار، محل خواب، زمان بیدار شدن و غیره است. تصمیمات آلفا به گروه دیکته می‌شود. با این حال، نوعی رفتار دموکراتیک نیز مشاهده شده است که در آن یک آلفا از دیگر گرگ‌های گروه پیروی می‌کند. در گردهمایی‌ها، کل بسته با پایین نگه داشتن دم، آلفا را تصدیق می‌کنند. گرگ آلفا گرگ غالب نیز نامیده می‌شود، زیرا دستورات او باید توسط گله انجام شود. گرگ‌های آلفا فقط مجاز به جفت‌گیری در گله هستند. جالب اینجاست که آلفا لزوماً قوی‌ترین عضو بسته نیست، بلکه از نظر مدیریت بسته بهترین است. این موضوع نشان می‌دهد سازماندهی و نظم و انضباط یک بسته بسیار مهم‌تر از قدرت آن است. دومین سطح در سلسله‌مراتب گرگ‌های خاکستری بتا است. بتاها گرگ‌های زیردستی هستند که به آلفا در تصمیم‌گیری یا سایر فعالیت‌های دسته کمک می‌کنند. گرگ بتا می‌تواند نر یا ماده باشد و در صورتی که یکی از گرگ‌های آلفا از دنیا برود یا بسیار پیر شود، احتمالاً بهترین نامزد برای آلفا شدن است. گرگ بتا باید به آلفا احترام بگذارد، اما به سایر گرگ‌های سطح پایین نیز فرمان می‌دهد. این نقش یک مشاور آلفا و نظم‌دهنده برای بسته بازی می‌کند. بتا دستورات آلفا را در سراسر بسته تقویت می‌کند و به آلفا بازخورد می‌دهد. پایین‌ترین رتبه گرگ خاکستری امگا است. امگا نقش بزغاله را بازی می‌کند. گرگ‌های امگا همیشه باید تسلیم همه گرگ‌های غالب باشند. آن‌ها آخرین گرگ‌هایی هستند که اجازه خوردن دارند. ممکن است به نظر برسد که امگا یک فرد مهم در بسته نیست، اما مشاهده شده است که در صورت از دست دادن امگا، کل بسته با درگیری و مشکلات داخلی مواجه می‌شود. این به دلیل تخلیه خشونت و ناامیدی همه گرگ‌ها توسط امگا (ها) است. این موضوع به رضایت کل بسته و حفظ ساختار تسلط کمک می‌کند. در برخی موارد امگا نیز پرستار بچه در بسته است. اگر یک گرگ آلفا، بتا یا امگا نباشد، او را تابع (یا دلتا در برخی منابع) می‌نامند. گرگ‌های دلتا باید به آلفا و بتا تسلیم شوند، اما آن‌ها بر امگا تسلط دارند. پیشاهنگان، نگهبانان، بزرگان، شکارچیان و مراقبان از این دسته هستند. پیشاهنگان وظیفه نظارت بر مرزهای قلمرو را به عهده دارند و در صورت بروز هرگونه خطر به گروه هشدار می‌دهند. Sentinels از ایمنی بسته محافظت و تضمین می‌کند. بزرگان گرگ‌های باتجربه‌ای هستند که قبلاً آلفا یا بتا بودند. شکارچیان هنگام شکار طعمه و تهیه غذا برای گله به آلفاها و بتاها کمک می‌کنند. در نهایت، مراقبان وظیفه مراقبت از گرگ‌های ضعیف، بیمار و زخمی گله را به عهده دارند. علاوه بر سلسله‌مراتب اجتماعی گرگ‌ها، شکار گروهی یکی دیگر از رفتارهای اجتماعی جالب گرگ‌های خاکستری است. مراحل اصلی شکار گرگ خاکستری به شرح زیر است [۱۲]:

۱. ردیابی، تعقیب و نزدیک شدن به طعمه.
۲. تعقیب، محاصره و آزار شکار تا زمانی که از حرکت باز بماند.
۳. حمله به سمت طعمه.

این مراحل در شکل ۲ نشان داده شده است. در این کار این تکنیک شکار و سلسله‌مراتب اجتماعی گرگ‌های خاکستری به منظور طراحی GWO و انجام بهینه‌سازی به صورت ریاضی مدل شده است.



شکل ۱. سلسله‌مراتب گرگ خاکستری (تسلط از بالا به پایین کاهش می‌یابد)



شکل ۲. رفتار شکار گرگ‌های خاکستری: (A) تعقیب، نزدیک شدن و ردیابی طعمه (B-D) تعقیب، آزار و اذیت و احاطه کردن (E) موقعیت ثابت و حمله

در این بخش مدل‌های ریاضی سلسله‌مراتب اجتماعی، ردیابی، محاصره کردن و حمله به طعمه ارائه شده است. سپس الگوریتم GWO مشخص می‌شود.

۳-۱. سلسله‌مراتب اجتماعی

به منظور مدل‌سازی ریاضی سلسله‌مراتب اجتماعی گرگ‌ها هنگام طراحی GWO، مناسب‌ترین راه حل را به عنوان آلفا (a) در نظر می‌گیریم. در نتیجه دومین و سومین راه حل برتر به ترتیب بتا (b) و دلتا (d) نام دارند. بقیهٔ محلول‌های کاندید امگا (x) فرض می‌شوند. در الگوریتم GWO شکار (بهینه‌سازی) توسط a، b و d هدایت می‌شود. گرگ‌های x به دنبال این سه گرگ می‌آیند.

۳-۲. احاطه کردن طعمه

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، گرگ‌های خاکستری طعمه را طی شکار محاصره می‌کنند. به منظور مدل‌سازی ریاضی رفتار محاصره‌ای معادلات ۷ تا ۱۰ پیشنهاد شده است:

$$\vec{D} = \left| \vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t) \right| \quad (7)$$

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (8)$$

$$\vec{D} = \left| \vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t) \right| \quad (9)$$

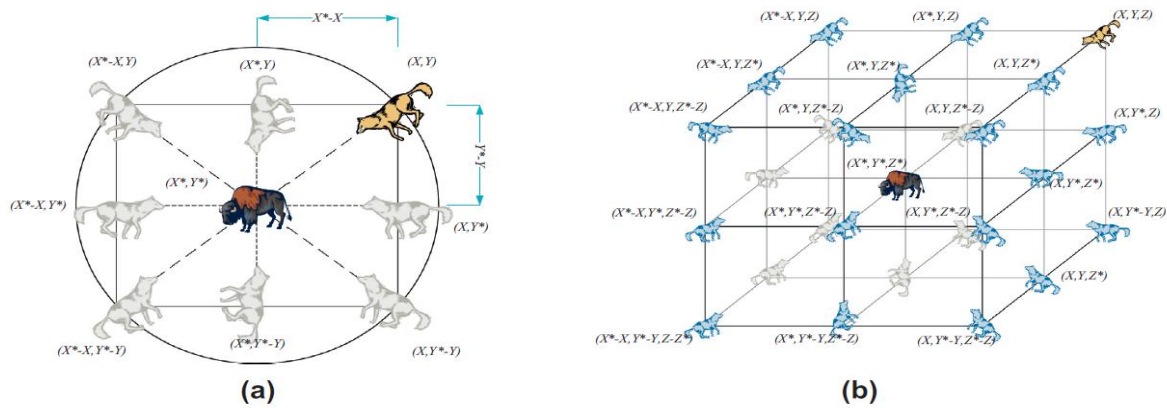
$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (10)$$

که در آن t تکرار فعلی را نشان می‌دهد، A و C بردارهای ضریب هستند، X_p بردار موقعیت طعمه است و X نشان‌دهنده بردار موقعیت یک گرگ خاکستری است. بردارهای A و C به صورت روابط ۱۱ و ۱۲ محاسبه می‌شوند:

$$\vec{A} = 2\vec{a} \cdot \vec{r}_1 - \vec{a} \quad (11)$$

$$\vec{C} = 2 \cdot \vec{r}_2 \quad (12)$$

که در آن مؤلفه‌های a به طور خطی از ۲ به ۰ طی تکرارها کاهش می‌یابند و r_1 ، r_2 بردارهای تصادفی در $[0, 1]$ هستند. برای دیدن اثرات معادله (۳،۱) و (۳،۲)، یک بردار موقعیت دوبعدی و برخی از همسایگان ممکن در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، یک گرگ خاکستری در موقعیت (X, Y) می‌تواند موقعیت خود را با توجه به موقعیت طعمه (X, Y) به روز کند. با تنظیم مقدار بردارهای A و C می‌توان با توجه به موقعیت فعلی به مکان‌های مختلف در اطراف بهترین عامل رسید. توجه داشته باشید که بردارهای تصادفی r_1 و r_2 به گرگ‌ها اجازه می‌دهند تا به هر موقعیتی بین نقاط نشان‌داده‌شده در شکل ۳ برسند. بنابراین یک گرگ خاکستری می‌تواند با استفاده از معادله‌ها موقعیت خود را در داخل فضای اطراف طعمه در هر مکان تصادفی به‌روز کند. (۳،۱) و (۳،۲). همین مفهوم را می‌توان به فضای جست‌وجو با Π بعد تعمیم داد و گرگ‌های خاکستری در ابرمکعب‌ها (یا ابرکره‌ها) در اطراف بهترین راه حل به‌دست‌آمده تا کنون حرکت خواهند کرد.



شکل ۳. بردارهای موقعیت دوبعدی و سه‌بعدی و مکان‌های بعدی احتمالی آن‌ها

۳-۳. شکار

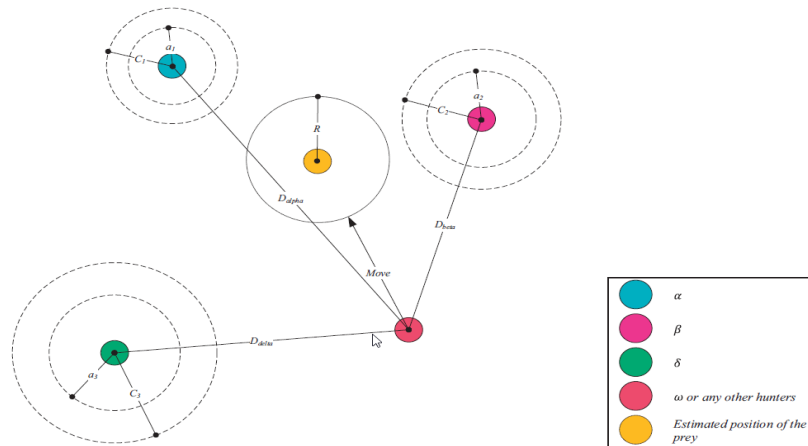
گرگ‌های خاکستری این توانایی را دارند که محل شکار را تشخیص دهند و آن‌ها را محاصره کنند. شکار معمولاً توسط آلفا هدایت می‌شود. بتا و دلتا نیز ممکن است گهگاه در شکار شرکت کنند. با این حال، در یک فضای جست‌وجوی انتزاعی، ما هیچ ایده‌ای در مورد مکان بهینه (شکار) نداریم. به منظور شبیه‌سازی ریاضی رفتار شکار گرگ‌های خاکستری، فرض می‌کنیم که آلفا (بهترین راه‌حل کاندید) بتا و دلتا اطلاعات بهتری در مورد موقعیت بالقوه طعمه دارند. بنابراین، ما سه راه‌حل اول بهترین راه‌حل به‌دست‌آمده را ذخیره می‌کنیم و سایر عوامل جست‌وجو (از جمله امگا) را موظف می‌کنیم تا موقعیت‌های خود را مطابق با موقعیت بهترین عوامل جست‌وجو به‌روزرسانی کنند. فرمول‌های ۱۳ تا ۱۵ در این رابطه پیشنهاد می‌شود.

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1 \cdot \vec{X}_\alpha - \vec{X}|, \vec{D}_\beta = |\vec{C}_2 \cdot \vec{X}_\beta - \vec{X}|, \vec{D}_\delta = |\vec{C}_3 \cdot \vec{X}_\delta - \vec{X}| \quad (13)$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_\alpha - \vec{A}_1 \cdot (\vec{D}_\alpha), \vec{X}_2 = \vec{X}_\beta - \vec{A}_2 \cdot (\vec{D}_\beta), \vec{X}_3 = \vec{X}_\delta - \vec{A}_3 \cdot (\vec{D}_\delta) \quad (14)$$

$$\vec{X}(t+1) = \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3}{3} \quad (15)$$

شکل ۴ نشان می‌دهد چگونه یک عامل جست‌وجو موقعیت خود را بر اساس آلفا، بتا و دلتا در یک فضای جست‌وجوی دوبعدی به‌روز می‌کند. می‌توان مشاهده کرد که موقعیت نهایی در یک مکان تصادفی در یک دایره است که با موقعیت‌های آلفا، بتا و دلتا در فضای جست‌وجو تعریف می‌شود. به بیان دیگر آلفا، بتا و دلتا موقعیت طعمه را تخمین می‌زنند و سایر گرگ‌ها موقعیت خود را به طور تصادفی در اطراف طعمه به‌روز می‌کنند.



شکل ۴. به‌روزرسانی موقعیت در GWO

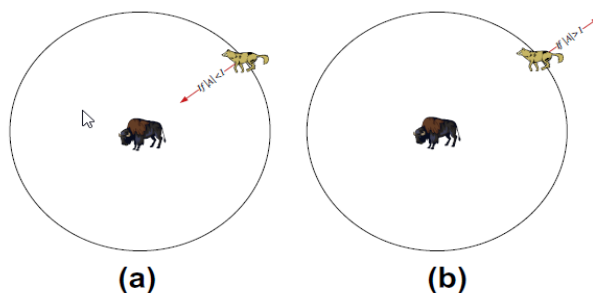
۳-۴. حمله به طعمه

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، گرگ‌های خاکستری شکار را با حمله به طعمه پس از توقف حرکت به پایان می‌برند. برای مدل‌سازی ریاضی نزدیک شدن به طعمه، مقدار a را کاهش می‌دهیم. توجه داشته باشید که دامنه نوسان A نیز با a کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، A یک مقدار تصادفی در بازه $[-2a, 2a]$ است که در آن a طی تکرارها از ۲ به ۰ کاهش می‌یابد. وقتی مقادیر تصادفی A در $[-1, 1]$ باشد، موقعیت بعدی یک عامل جست‌وجو می‌تواند در هر موقعیتی باشد.

هنگامی که مقادیر تصادفی A در $[1, -1]$ باشد، موقعیت بعدی یک عامل جست‌وجو می‌تواند در هر موقعیتی بین موقعیت فعلی آن و موقعیت طعمه باشد. شکل ۵ (a) نشان می‌دهد $|A| < 1$ اگرگ‌ها را مجبور می‌کند به سمت طعمه حمله کنند. با عملگرهایی که تا کنون پیشنهاد شده است، الگوریتم GWO به عوامل جست‌وجوی خود اجازه می‌دهد تا موقعیت خود را بر اساس مکان آلفا، بتا و دلتا به‌روز کنند و به سمت طعمه حمله کنند. با این حال، الگوریتم GWO مستعد رکود در راه‌های محلی با این اپراتورها است. درست است که مکانیسم احاطه‌ای پیشنهادی تا حدودی اکتشاف را نشان می‌دهد، اما GWO به اپراتورهای بیشتری برای تأکید بر اکتشاف ارسیف نیاز دارد.

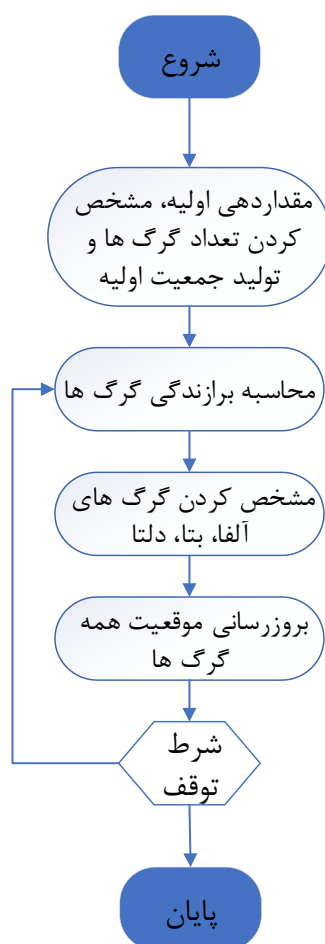
۳-۵. جست‌وجوی طعمه

گرگ‌های خاکستری بیشتر بر اساس موقعیت آلفا، بتا و دلتا جست‌وجو می‌کنند. آن‌ها برای جست‌وجوی طعمه از یکدیگر جدا می‌شوند و برای حمله به طعمه همگرا می‌شوند. به منظور مدل‌سازی ریاضی واگرایی، از A با مقادیر تصادفی بزرگ‌تر از ۱ یا کمتر از -۱ استفاده می‌کنیم تا عامل جست‌وجو را به واگرایی از طعمه وادار کنیم. این موضوع بر کاوش تأکید می‌کند و به الگوریتم GWO اجازه می‌دهد تا در سطح جهانی جست‌وجو کند. شکل ۵ (b) همچنین نشان می‌دهد $|A| > 1$ اگرگ‌های خاکستری را مجبور می‌کند تا از طعمه جدا شوند به امید اینکه طعمه مناسب‌تری پیدا کنند.



شکل ۵. حمله به طعمه در مقابل جست‌وجوی طعمه

یکی دیگر از اجزای GWO که به اکتشاف کمک می‌کند C است. همان‌طور که در معادله دیده می‌شود. (۳،۴)، بردار C حاوی مقادیر تصادفی در [۰، ۲] است. این مؤلفه وزن‌های تصادفی را برای طعمه به منظور تأکید تصادفی $C > 1$ یا تأکید نکردن ($C < 1$) تأثیر طعمه در تعریف فاصله در معادله فراهم می‌کند. این موضوع به GWO کمک می‌کند تا رفتار تصادفی تری را طی بهینه‌سازی نشان دهد و از اکتشاف و اجتناب از بهینه محلی حمایت کند. در اینجا شایان یادآوری است که C به خلاف A به صورت خطی کاهش نمی‌یابد. ما عمده‌اً از C می‌خواهیم مقادیر تصادفی را در همه‌ی زمان‌ها ارائه کند تا بر کاوش نه تنها طی تکرارهای اولیه، بلکه در تکرارهای نهایی تأکید شود. این جزء در صورت رکود بهینه‌ی موضعی، به‌ویژه در تکرارهای نهایی بسیار مفید است. بردار C را می‌توان به عنوان اثر موانع نزدیک شدن به طعمه در طبیعت نیز در نظر گرفت. به طور کلی، موانع موجود در طبیعت در مسیرهای شکار گرگ‌ها ظاهر می‌شود و در واقع مانع از نزدیک شدن سریع و راحت آن‌ها به طعمه می‌شود. این دقیقاً همان کاری است که بردار C انجام می‌دهد. بسته به موقعیت گرگ، می‌تواند به طور تصادفی به طعمه وزن دهد و دسترسی به گرگ‌ها را سخت‌تر و دورتر کند یا برعکس. به طور خلاصه، فرایند جست‌وجو با ایجاد یک جمعیت تصادفی از گرگ‌های خاکستری (راه حل‌های نامزد) در الگوریتم GWO شروع می‌شود. طی تکرارها، گرگ‌های آلفا، بتا و دلتا موقعیت احتمالی طعمه را تخمین می‌زنند. هر راه حل نامزد فاصله‌ی خود را از طعمه به‌روز می‌کند. پارامتر a به‌ترتیب از ۲ به ۰ کاهش می‌یابد تا بر اکتشاف و بهره‌برداری تأکید شود. زمانی که $A_j > 1$ از راه‌حل‌های کاندیدا از طعمه منحرف می‌شوند و زمانی که $A_j < 1$ به سمت طعمه همگرا می‌شوند، در نهایت، الگوریتم GWO با ارضای یک معیار پایانی خاتمه می‌یابد [۱۳].



شکل ۶. فلوچارت الگوریتم گرگ خاکستری

۴. نتایج

در این بخش، GWO به زبان برنامه‌نویسی پایتون کدگذاری می‌شود تا اعتبار مدل را بر اساس داده‌های عملیات و مسافران خط Yizhuang متروی پکن در ساعت‌های اولیهٔ اوج مصرف تأیید کند. کل زمان حرکت تمام قطارها در یک جهت یک چرخه است. خط Yizhuang به حومهٔ شهری متصل است که عمدتاً مسافران را جابه‌جا می‌کند. این کار فقط یک جهت را از ایستگاه راه‌آهن Yizhuang به ایستگاه Songjiazhuang مطالعه می‌کند. جدول زمانی استفاده‌شده در حال حاضر، زمان حرکت، زمان کشش و زمان ترمز بخش‌ها، نرخ ورود و نسبت پیاده شدن از قطار و برخی پارامترها در جدول‌های ۱ تا ۳ نشان داده شده است. جدول ۱

جدول ۱. جدول زمانی مورد استفاده

ایستگاه	Yizhuang	Ciqu	Ciqunan	Jinghai	Tongjinan	Rongchang	Rongjingn
مدت زمان توقف	-	۴۵	۳۵	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
زمان رسیدن	۰	۱۱۵	۲۶۲	۴۳۷	۶۱۷	۸۱۱	۹۴۵
ایستگاه	Wanyuan	Wenhuyuan	Yizhuangqiao	Jiugong	Xiaohongmen	Xiaocun	Songjiazhuang
مدت زمان توقف	۳۰	۳۰	۳۵	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
زمان رسیدن	۱۰۷۸	۱۲۲۲	۱۳۴۲	۱۵۱۲	۱۶۹۹	۱۸۳۷	۲۰۵۷

جدول ۲. نرخ ورود مسافر و نسبت پیاده شدن از قطار در ساعت‌های اوج مصرف

ایستگاه	Yizhuang	Ciqu	Ciqunan	Jinghai	Tongjinan	Rongchang	Rongjingn
τ_n	-	۰/۳۹	۰/۰۹	۰/۳۸	۰/۹۶	۰/۵۲	۰/۲۰
ρ_n	-	۰	۱/۰	۲/۰	۲/۳	۳/۹	۳/۵
ایستگاه	Wanyuan	Wenhuyuan	Yizhuangqiao	Jiugong	Xiaohongmen	Xiaocun	Songjiazhuang
τ_n	۰/۲۱	۰/۳۲	۰/۷۲	۱/۰۶	۰/۵۸	۰/۳۰	۰/۱۸
ρ_n	۳/۶	۰/۵	۰/۸	۱/۱	۰/۲	۱/۰	۱۰۰

τ_n : نرخ ورود مسافران (persons/s); ρ_n : درصد مسافرانی است که از یک قطار در یک ایستگاه خاص پیاده می‌شوند.

جدول ۲ نشان‌دهندهٔ نرخ ورود مسافر و نسبت پیاده شدن مسافران از قطار در حالت اوج بار است. این داده‌ها به صورت داده‌های ورودی در کدنویسی آورده شده است. در این پژوهش، با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری (GWO)، فرایند زمان‌بندی قطارها مورد تحلیل و بهینه‌سازی قرار گرفت. نتایج حاصل نشان می‌دهد که کارگیری روش‌های هوشمند در تنظیم زمان‌بندی قطارها به بهبود قابل توجهی در کارایی سیستم حمل‌ونقل عمومی منجر می‌شود و می‌تواند میزان زمان انتظار و سفر مسافران را کاهش دهد.

مقدار اولیه تابع هزینه قبل از اعمال بهینه‌سازی برابر با $۲۳۵۰۰/۷۵$ ثانیه بوده است. پس از اجرای الگوریتم گرگ خاکستری، این مقدار به $۱۶۹۳۹/۱۲$ ثانیه کاهش یافته که نشان‌دهندهٔ بهبود قابل توجه $۲۷/۹$ درصدی در کارایی سیستم مترو است. بررسی داده‌های خروجی نشان داد استفاده از الگوریتم GWO توانسته است زمان انتظار مسافران را در ایستگاه‌های مختلف بهینه کند و توزیع زمان سفر را بهبود بخشد. جدول ۳ به طور خلاصه نتایج حاصل از بهینه‌سازی را نشان می‌دهد.

در جدول ۳ زمان‌های انتظار و سفر در هر ایستگاه به واحد ثانیه نمایش داده شده‌اند که حاصل بهینه‌سازی با الگوریتم گرگ خاکستری هستند. به عنوان مثال، ایستگاه ۱ با زمان انتظار $۱۸/۱۸$ ثانیه و زمان سفر ۴۳۲۰ ثانیه، نشان‌دهندهٔ اختلاف قابل توجه بین مدت توقف و حرکت است؛ این موضوع ممکن است به دلیل موقعیت جغرافیایی یا شرایط ترافیکی مسیر باشد. ایستگاه ۲ با زمان انتظار $۲۱۴/۶۷$ ثانیه و زمان سفر $۲۳۹۲/۵۰$ ثانیه، نسبت به ایستگاه ۱ الگوی متفاوتی را ارائه می‌دهد که در آن زمان انتظار بیشتر بوده اما زمان سفر کمی کمتر است. در ایستگاه‌های ۳ تا ۷، زمان‌های انتظار بین $۲۸۲/۷۶$ تا $۳۳۶/۲۲$ ثانیه و زمان‌های

سفر بین ۷۲۰ تا ۱۲۰۰ ثانیه گزارش شده است که الگوی بهینه‌ای را برای جابه‌جایی مسافران نشان می‌دهد. ایستگاه‌های ۸ تا ۱۲ نیز با زمان‌های انتظار کمتر از ۶۰ ثانیه و زمان‌های سفر کمتر از ۱۲۰۰ ثانیه، شرایط مطلوب‌تری را به نمایش می‌گذارند. تحلیل این داده‌ها حاکی از آن است که بهینه‌سازی انجام‌شده موجب کاهش قابل توجه زمان‌های سفر و انتظار شده و می‌تواند بهبود کارایی سیستم مترو را به همراه داشته باشد. این نتایج می‌تواند مبنایی برای اتخاذ تصمیمات دقیق‌تر در مدیریت زمان‌بندی و ارتقای رضایت مسافران در سامانه‌های حمل‌ونقل عمومی محسوب شود.

جدول ۳. زمان انتظار و مسافت هر مسافر در ایستگاه‌های مختلف

ایستگاه	زمان سفر (ثانیه)	زمان انتظار (ثانیه)
۱	۴۳۲۰,۰۰	۱۸,۱۸
۲	۲۳۹۲,۵۰	۲۱۴,۶۷
۳	۱۲۰۰,۰۰	۳۳۴,۸۴
۴	۱۰۸۰,۰۰	۳۳۶,۲۲
۵	۹۶۰,۰۰	۴۷۰,۸۴
۶	۸۴۰,۰۰	۳۵۷,۵۸
۷	۷۲۰,۰۰	۲۸۲,۷۶
۸	۱۱۲۵,۰۰	۳۶,۷۲
۹	۸۷۶,۰۰	۵۳,۷۵
۱۰	۵۶۲,۵۰	۴۹,۸۶
۱۱	۵۰۱,۰۰	۸,۶۷
۱۲	۱۸۵,۰۰	۱۳,۰۵

زمان انتظار در ایستگاه‌های پرتردد به میزان قابل توجهی کاهش یافته و به صورت بهینه توزیع شده است. این موضوع بیانگر آن است که تنظیم مناسب فواصل زمانی حرکت قطارها، تأثیر مستقیمی بر بهبود سطح خدمات‌رسانی دارد. یکی از مزایای مهم استفاده از روش پیشنهادی، انعطاف‌پذیری آن در تنظیم زمان‌بندی قطارها متناسب با شرایط مختلف تقاضای سفر است. در ساعت‌های اوج مصرف، زمان‌بندی به نحوی تنظیم شده است که با افزایش ظرفیت جابه‌جایی مسافران، ازدحام کاهش یابد. همچنین، در ساعت‌های کم‌بار، فاصله بین حرکت قطارها به گونه‌ای تعیین شده که ضمن کاهش هزینه‌های عملیاتی، رضایت مسافران حفظ شود. این نتایج نشان می‌دهد بهینه‌سازی زمان‌بندی نه تنها موجب کاهش زمان انتظار می‌شود، بلکه به افزایش بهره‌وری کلی سیستم نیز منجر خواهد شد.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

نتایج این پژوهش نشان داد به‌کارگیری الگوریتم گرگ خاکستری (GWO) در بهینه‌سازی زمان‌بندی مترو به کاهش قابل توجه زمان انتظار و سفر مسافران منجر شده است. مقدار تابع هزینه از $23500/75$ ثانیه به $16939/12$ ثانیه کاهش یافت که نشان‌دهنده بهبود $27/9$ درصدی کارایی سیستم حمل‌ونقل عمومی است. این بهبود ناشی از تنظیم بهینه فواصل حرکت قطارها متناسب با شرایط هر ایستگاه و تقاضای پویا بوده است. کاهش زمان انتظار در ایستگاه‌های پرتردد و توزیع متعادل‌تر زمان‌های سفر، افزایش بهره‌وری و کاهش ازدحام در شبکه مترو را به دنبال داشته است. علاوه بر این، کاهش هزینه‌های عملیاتی و مصرف انرژی و همچنین بهبود تجربه مسافران از دیگر نتایج مثبت این پژوهش به شمار می‌رود.

به منظور توسعه و ارتقای مدل‌های بهینه‌سازی، چندین مسیر پژوهشی برای تحقیقات آینده پیشنهاد می‌شود. نخست، تعمیم مدل فعلی به یک مدل چندمتغیره که متغیرهایی همچون تعداد واگن‌ها، نرخ ورود مسافر، شرایط ترافیکی، ویژگی‌های ساختاری ایستگاه‌ها و تغییرات فصلی را نیز در نظر بگیرد، می‌تواند دقت بهینه‌سازی را افزایش داده و هزینه‌های عملیاتی را کاهش دهد. همچنین، استفاده از داده‌های واقعی و به‌روز از طریق جمع‌آوری داده‌های بلندمدت از ایستگاه‌های مترو و بهره‌گیری از

فناوری‌هایی مانند اینترنت اشیا و سنسورهای هوشمند می‌تواند دقت مدل‌های پیشنهادی را افزایش دهد. این داده‌ها امکان تنظیمات بلادرنگ و تطبیقی در زمان‌بندی حرکت قطارها را فراهم می‌آورند.

یکی دیگر از پیشنهادها، ترکیب الگوریتم GWO با سایر روش‌های بهینه‌سازی هوشمند نظیر الگوریتم ژنتیک (GA)، بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) و الگوریتم‌های یادگیری عمیق است. این ترکیب می‌تواند قوت‌های هر روش را به کار بگیرد و ضعف‌های احتمالی را جبران کند. برای مثال، استفاده از الگوریتم‌های یادگیری عمیق جهت پیش‌بینی روندهای ترافیکی و تقاضای سفر می‌تواند دقت تصمیمات زمان‌بندی را افزایش دهد. همچنین، پیشنهاد می‌شود که مدل‌های دینامیک و تطبیقی توسعه یابند، به گونه‌ای که بتوانند در شرایط اضطراری یا تغییرات ناگهانی، تنظیمات زمان‌بندی را به‌روزرسانی کنند و از ایجاد اختلالات جلوگیری کنند. این موضوع در سامانه‌های حمل‌ونقل عمومی که تحت تأثیر عوامل متغیر زیادی هستند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در کنار این موارد، ارزیابی جامع اثرات اقتصادی و اجتماعی بهینه‌سازی‌های انجام‌شده می‌تواند دیدگاه دقیق‌تری درباره افزایش رضایت مسافران، کاهش هزینه‌های عملیاتی و بهبود بهره‌وری سیستم ارائه دهد. بررسی این اثرات در بلندمدت می‌تواند به تصمیم‌گیری‌های استراتژیک در مدیریت سامانه‌های مترو کمک کند.

در نهایت، توسعه نرم‌افزارهای کاربردی و داشبوردهای مدیریتی برای مانیتورینگ و تحلیل داده‌های بهینه‌سازی توصیه می‌شود. این داشبوردها می‌توانند شاخص‌های کلیدی عملکرد (KPI) مانند زمان‌های انتظار و سفر را به صورت بلادرنگ نمایش دهند و به مدیران امکان اتخاذ تصمیمات سریع و مؤثر را بدهند. به طور کلی، ترکیب داده‌های واقعی، استفاده از روش‌های ترکیبی بهینه‌سازی، توسعه مدل‌های دینامیک و ایجاد داشبوردهای مدیریتی پیشرفته می‌تواند به بهبود کیفیت خدمات مترو، کاهش هزینه‌های عملیاتی و افزایش رضایت مسافران منجر شود و گامی مؤثر در جهت تحقق سامانه‌های حمل‌ونقل عمومی کارآمدتر و پایدارتر باشد.

منابع

1. Adjiman, C.S., et al., A global optimization method, α BB, for general twice-differentiable constrained NLPs—I. Theoretical advances. *Computers & Chemical Engineering*, 1998. **22**(9): p. 1137-1158.
2. Serafini, P. and W. Ukovich, A mathematical model for periodic scheduling problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1989. **2**(4): p. 550-581.
3. Kroon, L., et al., The new Dutch timetable: The OR revolution. *Interfaces*, 2009. **39**(1): p. 6-17.
4. Carey, M., A model and strategy for train pathing with choice of lines, platforms, and routes. *Transportation Research Part B: Methodological*, 1994. **28**(5): p. 333-353.
5. Caprara, A., M. Fischetti, and P. Toth, Modeling and solving the train timetabling problem. *Operations research*, 2002. **50**(5): p. 851-861.
6. Vansteenwegen, P. and D. Van Oudheusden, Developing railway timetables which guarantee a better service. *European Journal of Operational Research*, 2006. **173**(1): p. 337-350.
7. Hänseler, F., B. Farooq, and M. Bierlaire. Preliminary ideas for dynamic estimation of pedestrian origin-destination demand within train stations. in *Swiss Transport Research Conference*. 2012.
8. Cacchiani, V. and P. Toth, Nominal and robust train timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 2012. **219**(3): p. 727-737.
9. Barrena, E., et al., Single-line rail rapid transit timetabling under dynamic passenger demand. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2014. **70**: p. 134-150.
10. Cordone, R. and F. Redaelli, Optimizing the demand captured by a railway system with a regular timetable. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2011. **45**(2): p. 430-446.
11. Niu, H. and X. Zhou, Optimizing urban rail timetable under time-dependent demand and oversaturated conditions. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2013. **36**: p. 212-230.
12. Muro, C., et al., Wolf-pack (*Canis lupus*) hunting strategies emerge from simple rules in computational simulations. *Behavioural processes*, 2011. **88**(3): p. 192-197.
13. Mirjalili, S., S.M. Mirjalili, and A. Lewis, Grey wolf optimizer. *Advances in engineering software*, 2014. **69**: p. 46-61.